NOVAS IDENTIDADES COMBINATORIAIS COM NÚMEROS DE LUCAS

Danilo Braga Lopes, Lucas Antonio Caritá.

IFSP - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São José dos Campos
Rodovia Presidente Dutra, São José dos Campos, São Paulo, 12240-420
lopes.danilo@aluno.ifsp.edu.br , prof.carita@ifsp.edu.br

Resumo

Os números de Lucas pertencem à sequência que leva seu nome, introduzida por Édouard Lucas no século XIX, matemático que também se dedicou ao estudo da célebre sequência de Fibonacci. Neste artigo, apresentamos duas identidades envolvendo os números de Lucas e o binômio de Newton, cujas expressões resultam na unidade. Uma dessas identidades foi apresentada pela primeira vez, recentemente, no trabalho de Adegoke et al. (2023), enquanto a outra, até onde pudemos verificar na literatura consultada, é inédita.

Palavras-chave: Números de Lucas, Combinatória, Teoria dos Números.

Área do Conhecimento: Matemática.

Introdução

A sequência de Lucas (L_n) é uma sucessão numérica definida pela relação de recorrência $L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$ para $n\geq 1$, com termos iniciais $L_1=1$ e $L_2=3$. Dessa forma os primeiros termos dessa sequência são:

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\cdots$$

Um resultado fundamental relacionado à sequência de Lucas é a fórmula de Binet, que permite calcular diretamente o n-ésimo termo sem o uso da lei de recorrência.

Teorema 1. Denotando o número de ouro como $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e o seu conjugado como $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, temos, para todo n natural:

$$L_n=\alpha^n+\beta^n.$$

Demonstração: A prova será feita por indução sobre n.

1. Para $n=1$:

$$\alpha+\beta=1=L_1.$$

Para $n=2$:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=3=L_2.$$

2. Suponha que:

$$L_k=\alpha^k+\beta^k \text{ e } L_{k+1}=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}.$$

3. Usando $L_{k+2}=L_{k+1}+L_k$ e a hipótese de indução, obtemos:

$$\begin{array}{ccc} L_{k+2} & ¿ & \left(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}\right)+\left(\alpha^k+\beta^k\right) \\ ¿ & & ¿\ \alpha^k\alpha^2+\beta^k\beta^2 \\ ¿ & & ¿ \end{array}$$

□

O objetivo deste trabalho é apresentar e demonstrar duas identidades combinatoriais para os números de Lucas, uma obtida recentemente em Adegoke et al (2023) e outra inédita na literatura consultada.

Observação 1. Seja $n\in\mathbb{N}$ e $m\leq M$ inteiros entre 0 e n. Sejam a,b números quaisquer e $f,g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ funções inteiras. Para qualquer soma da forma

$$\sum_{k=m}^{M}\binom{n}{k}\left(a^{f(n-k)}b^{g(k)}\right),$$

podemos efetuar a mudança de índice $k\mapsto n-k$ para obter a igualdade

$$\sum_{k=m}^{M}\binom{n}{k}\left(a^{f(n-k)}b^{g(k)}\right)=\sum_{k=n-M}^{n-m}\binom{n}{k}\left(a^{f(k)}b^{g(n-k)}\right).$$

Uma demonstração para essa observação pode ser encontrada em Lopes et al (2026).

Metodologia

O presente estudo é parte de uma pesquisa teórica que se dedica a estudar, analisar, desenvolver e (re)construir conceitos e ideias que compõem a fundamentação das sucessões de Lucas e de Fibonacci do ponto de vista da teoria dos númerosw, abrindo margem para diálogos teóricos, argumentação e questionamentos sobre hipóteses e conclusões.

A investigação parte da revisão e da análise de resultados consolidados na literatura, buscando estabelecer diálogos teóricos, bem como formular e discutir hipóteses e conjecturas acerca de possíveis novos resultados. Nesse contexto, um dos resultados obtidos é apresentado neste trabalho na forma de uma identidade inédita, cujo enunciado e demonstração constituem o foco do presente estudo.

Resultados

Agora, apresentaremos as identidades combinatórias estudadas neste trabalho.

Identidade 1. Para qualquer número n natural:

$$1=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^k L_{2n+1-2k}.$$

Demonstração:

$$1=1^{2n+1}=(\alpha+\beta)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\alpha^{2n+1-k}\beta^k+\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\alpha^{2n+1-k}\beta^k.$$

Aplicando a Observação 1 com $n\mapsto 2n+1$, $m=n+1$, $M=2n+1$, $a=\alpha$, $b=\beta$, $f(k)=k$ e $g(k)=k$, obtemos

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\alpha^{2n+1-k}\beta^{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\alpha^{k}\beta^{2n+1-k}.$$

Assim,

$$1 \quad \text{¿}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\alpha^{2n+1-k}\beta^{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\alpha^{k}\beta^{2n+1-k}$$
$$\text{¿} \quad \text{¿}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(\alpha\beta)^{k}\left(\alpha^{2n+1-2k}+\beta^{2n+1-2k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}(-1)^{k}L_{2n+1-2k}.$$

□

Identidade 2. Para qualquer número n natural:

$$1=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}(-1)^{k}L_{2n-2k}+\binom{2n}{n}(-1)^{n}.$$

Demonstração:

$$1=1^{2n}=(\alpha+\beta)^{2n} \quad \text{¿}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\alpha^{2n-k}\beta^{k}$$
$$\text{¿} \qquad \text{¿}$$

Aplicando a Observação 1 com $n\mapsto 2n$, $m=n+1$, $M=2n$, $a=\alpha$, $b=\beta$, $f(k)=k$ e $g(k)=k$, obtemos

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}\alpha^{2n-k}\beta^{k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\alpha^{k}\beta^{2n-k}.$$

Assim,

$$1 \quad \text{¿}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\alpha^{2n-k}\beta^{k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\alpha^{k}\beta^{2n-k}+\binom{2n}{n}\alpha^{n}\beta^{n}$$
$$\text{¿} \quad \text{¿}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}(\alpha\beta)^{k}\left(\alpha^{2n-2k}+\beta^{2n-2k}\right)+\binom{2n}{n}(\alpha\beta)^{n}$$
$$\text{¿} \qquad \text{¿}$$

□

Discussão

Para as duas identidades apresentadas neste trabalho, as somas binomiais alternadas resultam em 1, que é o elemento neutro multiplicativo usual do conjunto dos números reais (isto é, ao multiplicar qualquer número real por 1, obtém-se o próprio número, sem alteração). A diferença entre as identidades está na paridade dos expoentes presentes nos termos binomiais das somas: na primeira, o expoente é ímpar, enquanto, na segunda, é par.
Os resultados mostram como a simetria dos coeficientes binomiais, associada às propriedades algébricas de α e β, permite obter identidades cujo resultado é exatamente a unidade. A Identidade 1 foi apresentada recentemente por Adegoke et al. (2023), enquanto a Identidade 2, conforme a literatura consultada, constitui um resultado inédito.

Conclusão

Os resultados apresentados neste trabalho mostram que a unidade pode ser expressa por somas alternadas envolvendo os números de Lucas e coeficientes binomiais. O trabalho contribui para o estudo das propriedades da sequência de Lucas e abre caminho para investigações adicionais sobre somas envolvendo números especiais.

Referências

LOPES, D. B; MARTINS, A; CARITÁ, L. A. Provando o Compêndio de Hoggatt das Identidades de Fibonacci e Lucas. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática – CQD**, v. 27, 1-30, 2026. DOI: https://doi.org/10.21167/cqdv27e27003

ADEGOKE, K.; FRONTZCAK, R.; GOY, T. Binomial sum relations involving Fibonacci and Lucas numbers. **Applied Math**., v. 3, n. 4, p. 851–881, 2023. DOI: https://doi.org/10.3390/appliedmath3040046

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pela concessão de bolsa de Iniciação Científica, no âmbito do Processo nº 2025/03393-0.