# DESEMPENHO MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS DA FUNÇÃO WEIBULL DE TRÊS PARÂMETROS NA MODELAÇÃO DIAMÉTRICA DE *Eucalyptus* spp.

**Thelma Shirlen Soares, Edmilson Santos Cruz**

Universidade Federal de Jataí, Curso de Engenharia Florestal, Câmpus Jatobá, BR 364, km 195, nº 3800 - 75801-615 - Jataí-GO, Brasil, thelmasoares@ufj.edu.br, edmilson_santos_cruz@ufj.edu.br.

**Resumo**

Este estudo teve como objetivo comparar o ajuste da função Weibull de três parâmetros à distribuição diamétrica de um povoamento de eucalipto, estimando seus parâmetros pelos métodos dos momentos, da máxima verossimilhança e dos percentis. Os dados foram obtidos de um inventário florestal contínuo com parcelas permanentes, cujas árvores foram tabuladas em classes diamétricas de 2 cm de amplitude. As estimativas de cada método foram comparadas por meio do teste de aderência de qui-quadrado, da estatística de Kolmogorov-Smirnov e dos critérios de log-verossimilhança e de informação de Akaike (AIC). Os três métodos apresentaram ajuste estatisticamente adequado, sem rejeição da hipótese de aderência à Weibull em nenhum dos casos. A máxima verossimilhança apresentou o melhor desempenho segundo o log-verossimilhança e o AIC, o método dos momentos apresentou a menor discrepância pontual (Kolmogorov-Smirnov) e o método dos percentis resultou no menor qui-quadrado pontual, evidenciando que nenhum método foi uniformemente superior aos demais. Conclui-se que a função Weibull de três parâmetros é uma ferramenta robusta e flexível para representar a estrutura diamétrica do povoamento estudado, independentemente do método de estimação utilizado.
**Palavras-chave**: Função Weibull. Estimação de parâmetros. Inventário florestal.

**Área do Conhecimento:** Ciências Agrárias.

## Introdução

O conhecimento da distribuição diamétrica é fundamental para o planejamento do manejo florestal, pois permite descrever a estrutura do povoamento por classes de tamanho e estimar o número de árvores, a área basal e o volume por unidade de área (MIRANDA *et al*., 2018; SCOLFORO *et al*., 2019; WALDY *et al*., 2022). Em plantios clonais de *Eucalyptus*, essa variável ganha relevância adicional por sustentar a previsão da produção por sortimento, subsidiar a definição de regimes de desbaste e corte e embasar a atualização de inventários em sistemas compatíveis de crescimento e produção (MIRANDA *et al*., 2018; SCOLFORO *et al*., 2019).

Dentre as funções de densidade de probabilidade empregadas para modelar essa estrutura, a função de Weibull destaca-se pela sua flexibilidade em representar distribuições simétricas e assimétricas (à direita ou à esquerda). Em sua forma de três parâmetros, a inclusão do parâmetro de locação confere maior adaptabilidade à variabilidade observada em povoamentos jovens ou submetidos a diferentes intensidades de manejo (BAILEY; DELL, 1973). Em povoamentos clonais, observam-se fortes relações entre os parâmetros dessa função e os atributos do povoamento, o que favorece seu emprego em sistemas de predição e projeção (MIRANDA *et al*., 2018; SCHMIDT *et al*., 2020).

A adequada representação da estrutura diamétrica por meio da distribuição de Weibull depende, contudo, do método utilizado para estimar seus parâmetros. Entre os métodos clássicos, destacam-se o dos momentos (que iguala momentos amostrais e teóricos), o da máxima verossimilhança (que maximiza a probabilidade conjunta dos dados) e o dos percentis (baseado em quantis empíricos). Tais métodos diferem em complexidade computacional, eficiência estatística e sensibilidade ao agrupamento dos dados em classes de frequência, podendo produzir estimativas distintas para um mesmo conjunto de dados, sem que haja um método uniformemente superior na literatura (CAO, 2004).

Quanto às estratégias de ajuste, evidências indicam que tanto a abordagem de recuperação de parâmetros quanto a de predição por atributos do povoamento podem gerar estimativas acuradas. No

entanto, o desempenho dessas abordagens varia em função da idade do povoamento e da finalidade do modelo (SCHMIDT *et al.*, 2020).

Diante do exposto, o presente estudo teve como objetivo comparar o ajuste da função Weibull de três parâmetros à distribuição diamétrica de um povoamento clonal de eucalipto, estimado por meio de três métodos momentos, máxima verossimilhança e percentis, avaliando a qualidade de ajuste de cada método por meio do teste de aderência de qui-quadrado, da estatística de Kolmogorov-Smirnov e de critérios de informação.

**Metodologia**

Os dados utilizados são provenientes do inventário florestal contínuo de um povoamento do híbrido *Eucalyptus grandis* x *Eucalyptus urophylla*, localizado na região nordeste do Estado da Bahia, em um total de 97 parcelas permanentes distribuídas por diferentes talhões.

Para cada parcela e medição, o número de árvores foi estruturado em classes diamétricas com amplitude de 2 cm, cujos centros foram definidos a partir do menor diâmetro registrado no povoamento. A consistência dessa estrutura foi verificada comparando-se a média ponderada dos centros de classe ao diâmetro médio aritmético registrado na base.

A distribuição diamétrica de cada parcela foi ajustada pela função Weibull de três parâmetros, cuja função densidade de probabilidade (fdp) é dada por:

$$f(x)=\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{\gamma}} ;\ \alpha \le x < \infty;\ \alpha \ge 0;\ \beta > 0;\ \gamma > 0 \qquad (1)$$

em que $\alpha$ é o parâmetro de locação, $\beta$ é o parâmetro de escala e $\gamma$ é o parâmetro de forma. A função de distribuição acumulada (fda), utilizada na obtenção das frequências esperadas por classe e nos testes de aderência, é dada por:

$$F(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{\gamma}\right] \qquad (2)$$

Os parâmetros $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ foram estimados por três métodos clássicos: momentos, máxima verossimilhança e percentis, aplicados aos dados agrupados em classes de frequência.

O método dos momentos consiste em igualar os momentos amostrais (média, variância e coeficiente de assimetria) aos respectivos momentos teóricos da distribuição Weibull, expressos em termos da função gama ($\Gamma$):

$\bar{x} = \alpha + \beta \cdot \Gamma(1 + 1/\gamma)$ (3)

$S^2 = \beta 2 \cdot [\Gamma(1 + 2/\gamma) - \Gamma 2(1 + 1/\gamma)]$ (4)

$g_1 = \{\Gamma(1 + 3/\gamma) - 3\Gamma(1 + 1/\gamma)\Gamma(1 + 2/\gamma) + 2\Gamma 3(1 + 1/\gamma)\} / [\Gamma(1 + 2/\gamma) - \Gamma 2(1 + 1/\gamma)]^{1,5}$ (5)

em que $\bar{x}$, $S^2$ e $g_1$ são, respectivamente, a média, a variância e o coeficiente de assimetria amostrais, calculados a partir dos centros de classe ponderados pelas frequências observadas.

Como a equação (5) depende exclusivamente do parâmetro de forma $\gamma$, este foi obtido numericamente por busca de raiz (método de Brent), e em seguida $\beta$ e $\alpha$ foram obtidos por substituição direta nas equações (4) e (3), respectivamente.

Para dados organizados em classes de frequência, a função de log-verossimilhança foi construída considerando a probabilidade de uma árvore pertencer ao intervalo de classe, e não a densidade pontual no centro de classe, de modo a incorporar corretamente o agrupamento dos dados:

$ln\ L(\alpha, \beta, \gamma) = \Sigma_i\ n_i \cdot ln[\ F(LS_i) - F(LI_i)\ ]$ (6)

em que $n_i$ é a frequência observada na i-ésima classe, e $LI_i$ e $LS_i$ são os limites inferior e superior dessa classe.

A maximização de (6) foi realizada numericamente (algoritmo Nelder-Mead), com valores iniciais fornecidos pelas estimativas do método dos momentos, sujeita à restrição $\alpha < LI_1$ (o parâmetro de locação deve ser inferior ao limite inferior da primeira classe observada).

O método dos percentis baseia-se na relação entre os percentis teóricos da distribuição Weibull e os quantis empíricos da distribuição observada:

$x_p = \alpha + \beta \cdot [-\ln(1 - p)]^{1/\gamma}$ (7)

Foram utilizados os percentis p = 0,24, 0,58 e 0,97, conforme recomendado pelos autores originais do método, calculados empiricamente por interpolação linear dentro da classe de frequência acumulada correspondente.

A partir das três equações resultantes de (7), o parâmetro de forma $\gamma$ foi isolado algebricamente e obtido por solução numérica de uma equação não linear univariada; em seguida, $\beta$ e $\alpha$ foram obtidos por substituição direta.

O desempenho dos três métodos de estimação foi comparado por meio dos seguintes critérios:

a) teste de aderência de qui-quadrado ($\chi^2$):

$$\chi 2 = \Sigma_i \, (fo_i - fe_i)^2 / fe_i \qquad (8)$$

em que $fo_i$ e $fe_i$ são as frequências observada e esperada na classe i, com $fe_i$ obtida pela integral da fdp (ou diferença da fda) nos limites de classe multiplicada pelo número total de árvores. Nas classes com frequência esperada inferior a 5 árvores, adotou-se o agrupamento com a classe adjacente antes do cálculo do $\chi^2$, a partir das caudas da distribuição, até que todas as classes remanescentes atingissem frequência esperada mínima igual a 5, recalculando-se os graus de liberdade. O $\chi^2$ calculado foi comparado ao valor tabelado a 5% de probabilidade, com graus de liberdade iguais ao número de classes (após o agrupamento) menos o número de parâmetros estimados menos um;

b) estatística de Kolmogorov-Smirnov ($D_{máx}$), definida como a maior diferença absoluta entre as funções de distribuição acumulada empírica e ajustada:

$$D_{máx} = máx_x \, | F_{emp}(x) - F_{aj}(x) | \qquad (9)$$

c) logaritmo da função de verossimilhança (log L), obtido diretamente da equação (6) nos valores estimados de cada método; e

d) critério de informação de Akaike (AIC), penalizando o número de parâmetros do modelo:

$$AIC = 2k - 2 \ln L \qquad (10)$$

em que k = 3 (número de parâmetros da Weibull 3P). Menores valores de AIC e $D_{máx}$, e menores valores não significativos de $\chi^2$, indicam melhor qualidade de ajuste.

Todos os procedimentos numéricos (estimação dos parâmetros, testes de aderência e geração de gráficos) foram implementados em linguagem Python, utilizando as bibliotecas SciPy (otimização numérica e funções especiais) e NumPy (cálculos matriciais e estatística descritiva).

## Resultados

Os três métodos de estimação convergiram para soluções numericamente estáveis, com estimativas de parâmetros distintas entre si, especialmente para o parâmetro de locação ($\hat{\alpha}$), que variou de 1,37 cm (percentis) a 4,75 cm (máxima verossimilhança) (Tabela 1).

Tabela 1 - Estimativas dos parâmetros da distribuição Weibull de três parâmetros pelos métodos dos momentos, da máxima verossimilhança e dos percentis.

| Método de ajuste | $\hat{\alpha}$ (cm) | $\hat{\beta}$ (cm) | $\hat{\gamma}$ | Solução |
|---|---|---|---|---|
| Momentos | 2,63 | 8,89 | 2,65 | Numérica + substituição analítica |
| Máxima verossimilhança | 4,75 | 6,51 | 1,91 | Numérica |
| Percentis (P24-P58-P97) | 1,37 | 9,99 | 2,96 | Numérica + substituição analítica |

Fonte: Elaborada pelos autores.

A qualidade de ajuste foi avaliada pelo teste de qui-quadrado ($\chi^2$), pela estatística de Kolmogorov-Smirnov ($D_{máx}$), pelo logaritmo da verossimilhança (log L) e pelo AIC (Tabela 2). Para os três métodos, o $\chi^2$ calculado foi inferior ao $\chi^2$ tabelado, não havendo rejeição da hipótese de aderência à Weibull em nenhum dos casos.

Tabela 2 - Estatísticas de aderência e ajuste da distribuição Weibull de três parâmetros segundo o método de estimação*.

| Método de ajuste | $\chi^2$ calc. | $D_{máx}$ (KS) | log L | AIC |
|---|---|---|---|---|
| Momentos | 3,68 ns | 0,028 | -141,33 | 288,7 |
| Máxima verossimilhança | 4,22 ns | 0,043 | -139,88 | 285,8 |

| Método de ajuste | $\chi^2$ calc. | $D_{máx}$ (KS) | log L | AIC |
|---|---|---|---|---|
| Percentis (P24-P58-P97) | 3,49 ns | 0,041 | -142,50 | 291,0 |

* Em que: ns = não significativo a 5% de probabilidade. Ajuste realizado com 7 classes de diâmetroe 3 parâmetros estimados (α, β, γ), resultando em 3 graus de liberdade; $\chi^2$ tabelado (α = 5%; gl = 3) = 7,815.
Fonte: Elaborada pelos autores.

A comparação das frequências observadas com as estimadas por classe (Tabela 3, Figura 1) mostra que os três métodos reproduziram adequadamente o padrão geral da distribuição diamétrica, com maior aderência nas classes centrais (10 e 12 cm) e leve subestimação da classe modal por todos os métodos.

Tabela 3 - Frequências observadas e esperadas (número de árvores) por classe de diâmetro, segundo os três métodos de ajuste.

| Classe (cm) | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Observada** | 12 | 15 | 18 | 12 | 11 | 7 | 1 | 76 |
| **Momentos** | 8,49 | 15,01 | 17,87 | 15,52 | 9,99 | 4,74 | 1,64 | 76,0 |
| **Máx. veross.** | 9,27 | 17,85 | 18,64 | 14,31 | 8,72 | 4,35 | 1,81 | 76,0 |
| **Percentis** | 8,99 | 14,83 | 17,46 | 15,17 | 9,67 | 4,43 | 1,41 | 76,0 |

Fonte: Elaborada pelos autores.

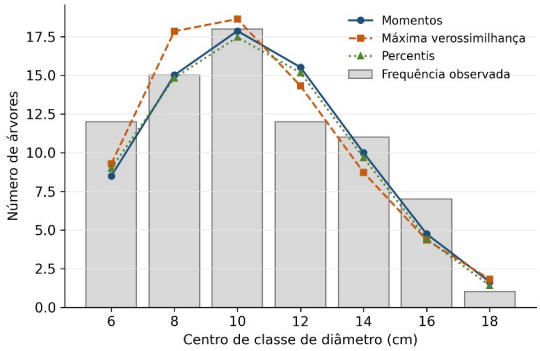



Figura 1 - Distribuição diamétrica observada (histograma) e frequências esperadas segundo a Weibull de três parâmetros ajustada pelos métodos dos momentos, da máxima verossimilhança e dos percentis.
Fonte: Elaborada pelos autores.

Para avaliar a consistência desses resultados, os três métodos foram aplicados às parcelas da base de dados cujos valores médios e desvios-padrão dos parâmetros e das estatísticas de aderência são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 - Valores médios (± desvio-padrão) dos parâmetros estimados e das estatísticas de ajuste da distribuição Weibull de três parâmetros, para 97 parcelas ajustadas simultaneamente pelos três métodos.

| Método | $\hat{\alpha}$ (cm) | $\hat{\beta}$ (cm) | $\hat{\gamma}$ | $\chi^2$ med. | Dmáx | AIC | % ader.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Momentos | 3,54±1,74 | 10,19±3,30 | 3,08±0,88 | 3,68 | 0,04±0,03 | 208±50 | 88,7% |
| Máx. verossim. | 4,26±1,40 | 9,40±2,95 | 2,95±0,97 | 3,97 | 0,04±0,02 | 205±42 | 86,6% |
| Percentis | 4,38±2,64 | 9,30±3,41 | 2,79±0,88 | 5,65 | 0,05±0,02 | 223±66 | 68,0% |

*Percentual de parcelas em que o teste de qui-quadrado não rejeitou a hipótese de aderência à Weibull (α = 5%).
Fonte: Elaborada pelos autores.

O método dos momentos apresentou o maior percentual de parcelas com aderência adequada (88,7%), seguido da máxima verossimilhança (86,6%) e dos percentis (68,0%). Já quanto ao critério de informação de Akaike, a máxima verossimilhança obteve o menor AIC médio e foi o método com melhor ajuste (menor AIC) em 94,8% das parcelas, contra 4,1% do método dos momentos e 1,0% dos percentis (Figura 2). Por outro lado, considerando o menor $\chi^2$ pontual por parcela, o método dos momentos foi superior em 64,9% dos casos.

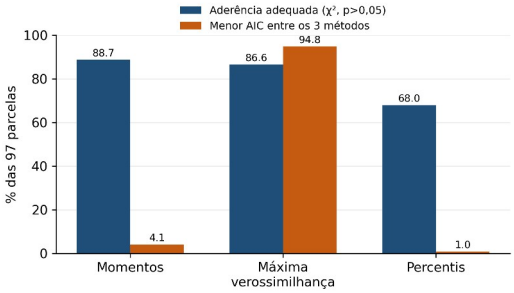



Figura 2 - Percentual de parcelas com aderência à distribuição Weibull (χ², α = 5%) e com menor AIC segundo cada método. Fonte: Elaborada pelos autores.

## Discussão

O método da máxima verossimilhança apresentou o melhor desempenho segundo o log-verossimilhança e o AIC, resultado consistente com o caráter assintoticamente eficiente desse estimador (Cao, 2004), ainda que esses critérios, isoladamente, não permitam afirmar maior eficiência estatística em sentido geral. Cabe destacar que, por se tratar de dados agrupados em classes de frequência, o log L empregado no cálculo do AIC corresponde à log-verossimilhança multinomial das probabilidades de classe, conforme a Equação (6), e não à verossimilhança da densidade contínua nos pontos individuais; essa distinção é o que permite a comparação direta do AIC entre os três métodos, já que todos foram avaliados sob a mesma formulação de verossimilhança agrupada. O método dos momentos apresentou a menor estatística de Kolmogorov-Smirnov indicando a menor discrepância máxima pontual entre as distribuições acumuladas observada e estimada, ao passo que o método dos percentis resultou no menor valor de $\chi^2$, associado ao menor desvio quadrático relativo entre as frequências observadas e esperadas por classe.

A análise conjunta das parcelas confirmou esse padrão: a máxima verossimilhança obteve o melhor AIC na maioria dos casos (94,8%), pois é o estimador que maximiza a verossimilhança dos dados observados; já o método dos momentos apresentou, em média, o maior percentual de parcelas com aderência estatisticamente adequada pelo $\chi^2$ (88,7%) e o menor $\chi^2$ pontual na maioria delas (64,9%).

O desempenho inferior do método dos percentis no conjunto de parcelas (68,0% de aderência adequada, ante 88,7% e 86,6% dos demais métodos) é um resultado relevante para a prática florestal. Esse método depende da separação de três percentis empíricos ($P_{24}$, $P_{58}$ e $P_{97}$) claramente distintos; em parcelas com amplitude diamétrica estreita ou poucas classes de frequência, essa separação é pouco pronunciada, tornando as estimativas de forma ($\hat{\gamma}$) e escala ($\hat{\beta}$) mais sensíveis a variações amostrais. De fato, o método dos percentis apresentou maior incidência de exclusões por não convergência ou implausibilidade das estimativas durante o processo de ajuste, evidenciando sua maior sensibilidade à estrutura de classes dos dados agrupados em relação à máxima verossimilhança e aos momentos.

A diferença entre os valores médios do parâmetro de locação ($\hat{\alpha}$) obtidos pelos três métodos (de 3,54 a 4,38 cm), embora expressiva numericamente, reflete a correlação entre locação e forma na distribuição Weibull de três parâmetros e não compromete a qualidade geral do ajuste, visto que deslocamentos em $\hat{\alpha}$ tendem a ser compensados por ajustes em $\hat{\gamma}$.

Esses resultados evidenciam a ausência de um método uniformemente superior quando diferentes critérios de aderência são considerados simultaneamente: a escolha depende do critério estatístico priorizado e do compromisso entre exatidão do ajuste e simplicidade computacional.

De modo geral, os resultados concordam com o reportado na literatura florestal para outras espécies e condições de povoamento, reforçando a robustez da função Weibull de três parâmetros como modelo de distribuição diamétrica e indicando que a escolha do método de estimação deve considerar o critério estatístico adotado e a estrutura de classes dos dados (Bailey; Dell, 1973; Cao, 2004).

## Conclusão

Os métodos dos momentos, da máxima verossimilhança e dos percentis apresentaram ajuste estatisticamente adequado à distribuição diamétrica avaliada, sem rejeição da aderência à função Weibull de três parâmetros em nenhum dos casos analisados individualmente. Contudo, na análise conjunta das 97 parcelas, o desempenho relativo dos métodos diferiu conforme o critério considerado: a máxima verossimilhança apresentou o melhor desempenho segundo o log-verossimilhança e o AIC, o método dos momentos obteve a menor discrepância pontual (Kolmogorov-Smirnov) e o maior percentual de parcelas com aderência adequada pelo $\chi^2$ (88,7%), ao passo que o método dos percentis, apesar do menor $\chi^2$ pontual no ajuste individual, apresentou desempenho inferior na análise conjunta, com apenas 68,0% de aderência adequada. Conclui-se, portanto, que nenhum método se mostrou uniformemente superior aos demais, mas que os métodos dos momentos e da máxima verossimilhança revelaram-se mais consistentes que o dos percentis quando aplicados ao conjunto de parcelas.

**Referências**

BAILEY, R. L.; DELL, T. R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. **Forest Science**, v. 19, n. 2, p. 97-104, 1973.

CAO, Q. V. Predicting parameters of a Weibull function for modeling diameter distribution. **Forest Science**, v. 50, n. 5, p. 682-685, 2004.

MIRANDA, R. O. V.; FIORENTIN, L. D.; PÉLLICO NETTO, S.; JUVANHOL, R. S.; CORTE, A. P. D. Prediction system for diameter distribution and wood production of eucalyptus. **Floresta e Ambiente**, v. 25, n. 3, p. e20160548 , 2018.

SCOLFORO, H. F.; MCTAGUE, J. P.; BURKHART, H.; ROISE, J.; CAMPOE, O.; STAPE, J. L. Eucalyptus growth and yield system: Linking individual-tree and stand-level growth models in clonal Eucalypt plantations in Brazil. **Forest Ecology and Management**, v. 432, p. 1-16, 2019.

SCHMIDT, L. N.; SANQUETTA, M. N. I.; MCTAGUE, J. P; SILVA, G. F.; FRAGA FILHO, C. V.; SANQUETTA, C. R.; SCOLFORO, J. R. S. On the use of the Weibull distribution in modeling and describing diameter distributions of clonal eucalypt stands. **Canadian Journal of Forest Research**, v. 50, n. 10, p. 1050-1063, 2020.

WALDY, J.; KERSHAW, J. A.; WEISKITTEL, A.; DUCEY, M. Diameter distribution model development of tropical hybrid Eucalyptus clonal plantations in Sumatera, Indonesia: A comparison of estimation methods. **New Zealand Journal of Forestry Science**, v. 52, p. 1-14, 2022.

.