ANÁLISE DA DINÂMICA DE UM BIODIGESTOR: LINEARIZAÇÃO E SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM SISTEMA NÃO LINEAR

Weverton Gonçalves Ewald, Fabiana Maria Ferreira.

Universidade Federal do Espírito Santo, Alto Universitário, S/N, Guararema, 29500-000 – Alegre - ES, Brasil, weverton.ewald@edu.ufes.br, fabiana.m.ferreira@ufes.br.

Resumo:
Em busca de meios sustentáveis e renováveis para a produção de energia, destaca-se a produção de biogás por meio de biodigestores, os quais operam a partir da fermentação de matéria orgânica. Este trabalho analisou o comportamento dinâmico de um biodigestor por meio de um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares, modelando a interação entre a população bacteriana e a produção de biogás. A partir da linearização do sistema na vizinhança dos pontos de equilíbrio e da aplicação do Teorema de Hartman–Grobman, investigaram-se as condições de estabilidade do modelo e a dinâmica associada ao processo fermentativo. A fim de avaliar a qualidade da aproximação obtida pela linearização, utilizaram-se métodos computacionais para comparar as soluções do modelo não linear com as do modelo linearizado. Os resultados obtidos evidenciaram a influência da retirada controlada de biogás na estabilidade do sistema e na manutenção da atividade microbiana.
Palavras-chave: Biodigestores. Hartman-Grobman. Sistemas não Lineares.

Área do Conhecimento: Ciências exatas e da terra: Matemática

Introdução

O crescimento contínuo da demanda energética mundial, associado à finitude dos recursos fósseis, tem impulsionado a busca por fontes de energia renováveis e sustentáveis. A dependência de combustíveis não renováveis está diretamente relacionada a impactos ambientais e a conflitos geopolíticos, o que reforça a urgência de alternativas energéticas menos poluentes e mais acessíveis (EPE, 2025). Nesse contexto, o biogás se destaca como um combustível renovável obtido a partir da decomposição de matéria orgânica, sendo produzido em reatores anaeróbios conhecidos como biodigestores (Oliveira et al, 2024).

Diante disso, é crucial compreender que a proliferação bacteriana dentro de um biodigestor ocorre em um sistema físico limitado. Esse ambiente confinado impõe um volume máximo que o biogás pode ocupar, estabelecendo, portanto, um limite teórico para a quantidade específica do gás que pode ser produzida.

Para modelar matematicamente essa interação dinâmica entre a população de bactérias e a acumulação de biogás ao longo do tempo, recorre-se, em geral, a sistemas de equações diferenciais. Neste trabalho considera-se o modelo proposto por Bassanezi e Ferreira Junior (1988), dado pelo Sistema (1):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x) - pxy \\ \dfrac{dy}{dt} = kx - h(y,t). \end{cases} \tag{1}$$

Em que $x(t)$ representa a população bacteriana e $y(t)$ denota a quantidade de biogás acumulada no instante de tempo t. As constantes positivas p e k estão associadas, respectivamente, ao efeito inibitório do biogás sobre as bactérias e à taxa de geração do gás. A função $F(x)$ descreve a dinâmica de crescimento bacteriano, enquanto $h(y,t)$ modela a taxa de remoção do biogás do reator. Cabe ressaltar que as unidades de medida das variáveis e parâmetros podem variar de acordo com as especificidades do sistema ou as escolhas experimentais adotadas.

Diante desse modelo, destaca-se a função $h(y, t)$, responsável por descrever a retirada de biogás ao longo do processo fermentativo, influenciando na dinâmica do sistema. A partir dessa função, o sistema pode ser analisado sob duas condições operacionais distintas:

Caso 1: Sistema sem retirada de biogás, em que o gás se acumula livremente até atingir um equilíbrio ou saturação, também chamado de processo em batelada (Fogler, 2016), influenciando diretamente a atividade microbiana.

Caso 2: Sistema com retirada contínua ou controlada de biogás. Esta condição, de maior aplicabilidade prática, permite operar o biodigestor em regimes otimizados. Neste cenário, é particularmente relevante o estudo de estratégias de retirada, visando maximizar a produção sem comprometer a estabilidade da população bacteriana.

Desse modo, o presente trabalho tem como objetivo analisar a dinâmica populacional no interior do biorreator, bem como os efeitos da interação entre a população bacteriana e a produção de biogás para o caso que admite retirada de biogás. Essa abordagem permite compreender o comportamento qualitativo do modelo e contribuir para o estudo de modelos matemáticos aplicados a biodigestores.

Metodologia

Neste trabalho, a análise concentra-se no Caso 2, especificamente no regime de retirada parcial do biogás durante o processo de fermentação. Este modelo operacional busca um equilíbrio crítico: remover uma parcela do gás de forma contínua ou periódica para estimular a produção bacteriana, sem, no entanto, comprometer a pressão interna necessária para a dinâmica do reator ou a estabilidade do próprio consórcio microbiano (Tanaka, 2022). O estudo desse equilíbrio é fundamental para a maximização do rendimento global do sistema.

A colheita do gás produzido por um biodigestor pode ser efetuada de vários modos, o que é traduzido pela função $h(y, t)$. Considera-se o caso em que a retirada é proporcional à quantidade existente, isto é, $h(y, t) = \beta y$ em que $\beta > 0$ é a taxa de colheita. Adota-se também o crescimento bacteriano dado por $F(x) = \alpha x$, em que $\alpha > 0$ é a taxa de crescimento das bactérias. Substituindo essas funções no modelo geral (Equação 1), obtém-se

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - pxy \\ \dfrac{dy}{dt} = kx - \beta y, \end{cases} \tag{2}$$

sendo classificado como um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) não lineares. Para o tratamento analítico do sistema (2), procede-se inicialmente à determinação dos pontos de equilíbrio, que, em um sistema dinâmico, é um ponto do espaço de estado no qual as derivadas temporais se anulam, de modo que a dinâmica permanece constante ao longo do tempo (Hirsch, 2013).

A análise da estabilidade local do sistema não linear é conduzida mediante a linearização do sistema (2) e a aplicação do Teorema de Hartman–Grobman (Doering; Lopes, 2016; Rosa, 2015). Essa abordagem permite comparar, localmente, o comportamento do sistema não linear com sua aproximação linear. Restringindo-se à dimensão dois, este teorema garante que, na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, o retrato de fase e a estabilidade do sistema não linear são qualitativamente equivalentes aos do sistema linearizado a partir da matriz Jacobiana.

A fim de comparar as aproximações obtidas pela linearização e analisar o comportamento do sistema não linear fora da vizinhança imediata dos pontos de equilíbrio, empregaram-se métodos numéricos. Para a resolução numérica do sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares (Sistema 2), utilizou-se o método iterativo de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) (Boyce; Diprima, 2018). Esse método permite obter aproximações numéricas de alta precisão para as trajetórias $x(t)$ e $y(t)$ no espaço de fase.

Para parâmetros específicos, representam-se graficamente as soluções, em uma mesma escala, possibilitando uma comparação qualitativa entre os métodos. A análise visual indicou concordância entre as soluções quanto ao comportamento das curvas e como etapa futura, pretende-se quantificar essa concordância por meio do erro quadrático médio (EQM).

Resultados

A partir do sistema não linear (2), os pontos de equilíbrio são obtidos determinando as soluções do seguinte sistema algébrico:

$$\begin{cases} x(\alpha - py) = 0 \\ kx - \beta y = 0, \end{cases} \tag{3}$$

que resulta nos seguintes pontos de equilíbrio $P_1=(0,0)$ e $P_2=\left(\frac{\alpha\beta}{kp}, \frac{\alpha}{p}\right)$. Além disso, o sistema linearizado é da forma:

$$\begin{cases} x' = -\frac{\alpha\beta}{k}\, y \\ y' = k\, x - \beta\, y, \end{cases} \tag{4}$$

cuja matriz Jacobiana associada em um ponto (x_0, y_0) é dada por

$$A = J(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \alpha - py_0 & -px_0 \\ k & -\beta \end{bmatrix}.$$

A estabilidade de cada ponto de equilíbrio $(x_0,\ y_0)$ será determinada pela análise dos autovalores desta matriz Jacobiana, desde que as condições do Teorema de Hartman-Grobman sejam satisfeitas.

Para identificar o comportamento dinâmico nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio, analisa-se a matriz Jacobiana em cada um deles individualmente. O ponto trivial P_1 configura um ponto de sela porém carece de interesse biológico por representar a ausência de população bacteriana.

No caso do ponto de equilíbrio P_2, é possível determinar os autovalores da matriz Jacobiana, que são dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\beta}}{2}.$$

Assim, o ponto de equilíbrio P_2 é assintoticamente estável; mais precisamente, trata-se de um nó estável quando $\beta \geq 4\alpha$ (autovalores reais e negativos) e de uma espiral estável quando $\beta < 4\alpha$ (autovalores complexos conjugados com parte real negativa) (Boyce; Diprima, 2018).

Percebe-se que a dinâmica do biodigestor pode variar conforme os valores das constantes α e β. Para fins de simulação e comparação entre os modelos não linear e linearizado, o presente trabalho concentra sua análise no regime em que $\beta < 4\alpha$. Neste caso, a dinâmica do sistema apresenta formato espiralado, uma vez que os autovalores são complexos.

Denotando por a e b as partes real e imaginária dos autovalores $\lambda_{1,2}$, obtêm-se, respectivamente

$$a = \frac{-\beta}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{\sqrt{-(\beta^2 - 4\alpha\beta)}}{2}.$$

A partir da decomposição do autovetor complexo em suas partes real e imaginária, obtêm-se os autovetores,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{a}{k} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{k} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diante disso é possível construir a solução geral do sistema linearizado (4), na vizinhança do ponto de equilíbrio P_2. Essa solução dada pela curva parametrizada $X(t) = (x(t), y(t))$ da forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{at}}{k}\Big[a\big(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt)\big) + b\big(C_1\sin(bt) - C_2\cos(bt)\big)\Big] \\ y(t) &= e^{at}\big(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt)\big). \end{aligned} \tag{5}$$

As constantes reais C_1 e C_2 são determinadas a partir das condições iniciais do sistema ou a partir de dados experimentais.

A fim de realizar a visualização gráfica das dinâmicas do modelo não linear (2) e o modelo linearizado (4), adotaram-se os parâmetros experimentais apresentados na Tabela 1.

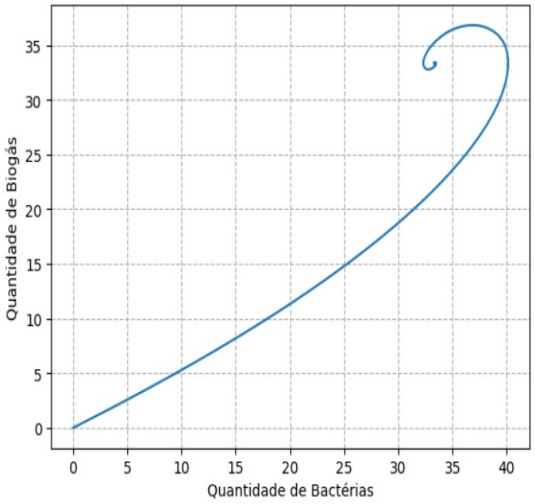
Tabela 1 – Parâmetros experimentais adotados para a simulação.

Parâmetro	Valor	Unidade
α	0.1	dia^{-1}
β	0.1	dia^{-1}
k	0.1	dia^{-1}
p	0.003	$g\ L^{-1}$
x0	0.03	$g\ L^{-1}$
y0	0	$10^{-3}\ L\ gSV^{-1}$

Fonte: Adaptado de Oliveira et al. (2024).

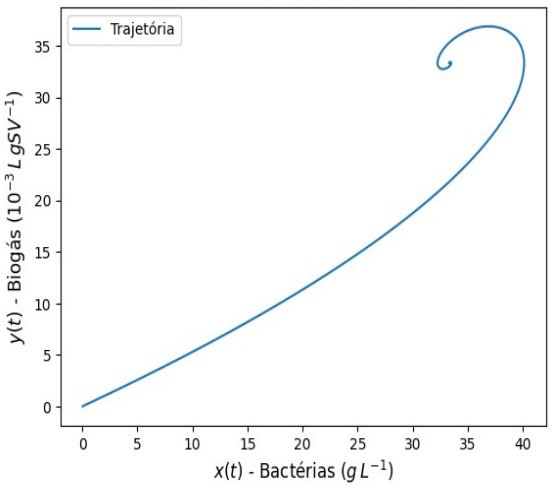
Com os valores da Tabela 1, constata-se a condição $\beta < 4\alpha$ $(0{,}1 < 0{,}4)$, confirmando a ocorrência do regime oscilatório e formula-se duas soluções: a solução computacional numérica do sistema não linear (2), obtida via método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), e a solução analítica do sistema linearizado dada em (5) e observa-se os comportamentos de tais soluções ilustrados nas Figuras 1 e 2, respectivamente.

Figura 1 – Gráfico do Sistema Não Linear - Sistema (2).



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 2 – Gráfico do Sistema Linearizado - Sistema (4).



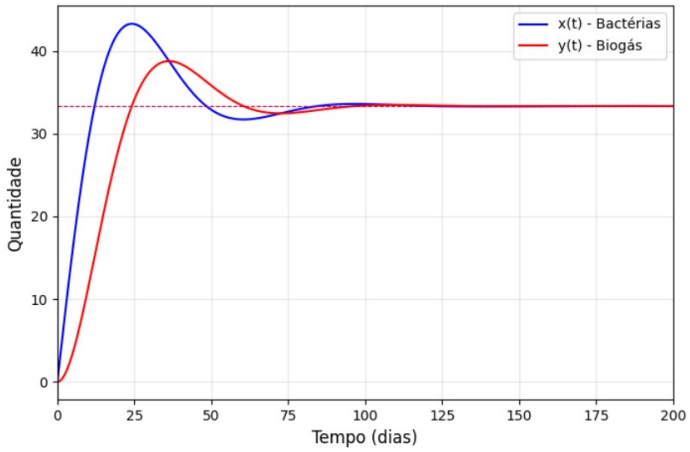
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

As trajetórias no plano de fase nas Figuras 1 e 2 confirmam a convergência do sistema para o ponto de equilíbrio $P_2 \approx (33{,}33\ ;33{,}33)$.

A comparação qualitativa entre as soluções do sistema linearizado e do sistema não linear revelou que, nas proximidades do ponto de equilíbrio, ambos os sistemas apresentaram comportamentos semelhantes.

Adicionalmente, a análise dos gráficos permite identificar o período de saturação do sistema em função do tempo. Observou-se que, após uma fase inicial, o sistema converge para um regime estacionário. Esse comportamento caracteriza a estabilização da dinâmica do biodigestor e fornece uma estimativa do tempo necessário para a operação em condições estáveis.

Figura 3 – Evolução Temporal do Sistema Linearizado.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Observa-se também pela Figura 3 a ação do biogás inibindo o crescimento da quantidade de bactérias no interior do reator. Verificou-se que, à medida que a quantidade de biogás aumenta, ocorre uma diminuição da população bacteriana.

Discussão

A análise da evolução temporal do sistema linearizado permite estimar o tempo necessário para que o sistema atinja o regime estacionário, bem como identificar as condições sob as quais a produção de biogás se estabiliza e a população bacteriana atinge níveis de saturação, evitando, assim, prejuízos operacionais ao produtor.

Do ponto de vista aplicado, a modelagem matemática de biodigestores mostrou-se uma ferramenta que possibilitou a compreensão e otimização do processo de produção de biogás, uma vez que a retirada controlada do gás influencia diretamente a atividade microbiana e a eficiência do sistema (Fogler, 2016).

Resultado semelhante quanto à existência de um regime de operação estável foi obtido por Balmant (2009), que, ao conceber e modelar matematicamente um biodigestor do tipo CSTR, verificou que a manutenção de uma faixa adequada de retirada de substrato e biogás é determinante para sustentar a atividade microbiana em patamares elevados. De maneira análoga, Tanaka (2022, 2024), ao investigar a dinâmica não linear de um biodigestor indiano por meio de técnicas de Lyapunov e da heurística VNS, também identificou a existência de pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis, reforçando que a estabilidade observada no presente trabalho não é uma particularidade do modelo adotado, mas uma característica recorrente em diferentes formulações matemáticas de biodigestores.

Observou-se que a constante de equilíbrio varia de acordo com os parâmetros utilizados, os quais dependem diretamente da classe da bactéria empregada. Esses parâmetros descrevem tanto a produção de biogás quanto a taxa de proliferação bacteriana no substrato. Dessa forma, cada biodigestor deve ser analisado individualmente, considerando a bactéria que se deseja inserir no biorreator, em consonância com o observado por Gerardi (2003) quanto à sensibilidade da atividade microbiana anaeróbia às condições do meio.

Ademais, aplicações dessa natureza possuem grande relevância no cenário atual, especialmente no que se refere à busca por fontes de energia renováveis e sustentáveis. A utilização de modelos matemáticos para descrever e prever o comportamento de sistemas biológicos complexos contribui significativamente para o avanço tecnológico na área, promovendo maior eficiência energética e viabilidade econômica dos biodigestores (Tanaka, 2024).

Conclusão

Ao longo deste trabalho, evidenciou-se a importância da modelagem matemática na compreensão da dinâmica de biodigestores e da produção de biogás. A partir da resolução do sistema linearizado e de sua interpretação no plano de fase, foi possível analisar o comportamento do sistema ao longo do

tempo e observar como alterações nos parâmetros podem modificar sua dinâmica e estabilidade. A utilização de métodos numéricos também permitiu comparar qualitativamente os modelos linearizado e não linear. Dessa forma, o modelo matemático mostra-se uma ferramenta relevante para analisar e auxiliar no entendimento do processo de produção de biogás, contribuindo para o estudo de fontes de energia renováveis.

Referências

BALMANT, W. **Concepção, construção e operação de um biodigestor e modelagem matemática da biodigestão anaeróbica**. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Ciência dos Materiais) — Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR, 2009.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JUNIOR, W. C. ***Equações diferenciais com aplicações*.** São Paulo: Harbra, 1988.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 10. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2018..

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 423 p. (Coleção Matemática Universitária). ISBN 978-85-244-0425-2.

EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. **ABCD da Energia**: anuário estatístico de energia. Rio de Janeiro: EPE, 2025. Disponível em: https://www.epe.gov.br/pt. Acesso em: *25 abril 2026.*

FOGLER, H. S. **Elementos de Engenharia das Reações Químicas**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

GERARDI, M. H. **The Microbiology of Anaerobic Digesters**. Hoboken: Wiley-Interscience, 2003. 177 p. (Wastewater Microbiology Series). ISBN 9780471206934.

HIRSCH, S. S.; SMALE, S.; DEVANEY, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems**, and an Introduction to Chaos. 3. ed. Waltham, MA: Academic Press, 2013.

OLIVEIRA, G. dos S.; SILVA, G. H. da; OTENIO, M. H.; QUINTELA, B. de M. Análise dos parâmetros mais influentes para a produção de biogás considerando um modelo computacional adaptado. In: ENCONTRO NACIONAL DE MODELAGEM COMPUTACIONAL, 27.; ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, 15., 2024, Juiz de Fora. **Anais...** Juiz de Fora: [s. n.], 2024.

ROSA, R. M. S. **Equações Diferenciais.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, UFRJ, 2015. Notas de aula disponível em: https://rmsrosa.github.io/assets/material/apostila-ed-18mar2024.pdf. Acesso em: 21 de agosto de 2026.

TANAKA, G. C. **Análise da dinâmica não linear do processo de biodigestão em um biodigestor indiano no espaço de estados via técnica de Lyapunov**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru, SP, 2022.

TANAKA, G. C. **Modelagem matemática da biodigestão anaeróbica em um biodigestor indiano, análise de estabilidade assintótica e otimização de variáveis de controle através da heurística VNS**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), Bauru, SP, jul. 2024.

Agradecimentos

Agradecemos ao Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) e a Universidade Federal do Espírito Santo (UFES).