IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL PARA O CÁLCULO DE ESFORÇOS EM TRELIÇAS PLANAS PELO MÉTODO DOS NÓS

Autores: Maria Clara Daltro Bastos, Carlos Frederico Macêdo Cortês, Fernanda Costa Nepomuceno

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Rua Rui Barbosa, 710, Centro, CEP 44.380-000 – Cruz das Almas-BA, Brasil, mariadaltro@aluno.ufrb.edu.br, carlosfmcortes@ufrb.edu.br, fernandacosta@ufrb.edu.br.

Resumo

O trabalho tem como objetivo desenvolver uma implementação computacional no Microsoft Excel para calcular esforços axiais e reações de apoio em treliças planas isostáticas biapoiadas pelo Método dos Nós. A metodologia se baseou na sistematização das propriedades geométricas das estruturas, transpondo as equações de equilíbrio estático para um modelo matricial e empregando o preenchimento lógico (*padding*) para evitar singularidades na matriz. Como resultados, a ferramenta foi validada em duas topologias de treliça, comparando os vetores de solução da planilha às simulações do software Ftool, apresentando elevada concordância entre os valores obtidos. Conclui-se que a conversão matricial no Excel reduz a ocorrência de erros associados ao processamento manual e aos arredondamentos intermediários, validando a planilha como instrumento educacional transparente e uma ferramenta acessível para verificação estrutural.

Palavras-chave: Treliças planas. Método dos nós. Análise matricial. Microsoft Excel.

Área do Conhecimento: Engenharia Civil.

Introdução

As treliças desempenham um papel fundamental na engenharia estrutural devido à sua eficiência em transmitir esforços predominantemente axiais, combinando baixo peso próprio e viabilidade econômica. O domínio do comportamento estático dessas estruturas é indispensável para garantir o atendimento a rigorosos critérios de segurança, abrangendo desde telhados até grandes obras de infraestrutura viária (Godoi; Vanalli; Silva, 2017). Para a análise e determinação dos esforços internos nessas estruturas, o Método dos Nós se consolida como um procedimento clássico. Conforme a literatura clássica de mecânica das estruturas (Hibbeler, 2011), esse método se fundamenta nas equações de equilíbrio de partículas e possui uma formulação algébrica ideal para a sistematização em modelos matriciais.

Embora o Método dos Nós seja conceitualmente direto, sua aplicação manual se torna extensa e suscetível a erros operacionais à medida que a estrutura cresce. Para contornar essas limitações, a implementação computacional se torna necessária. O uso do *Microsoft Excel* se justifica por sua transparência metodológica (abordagem *white-box*), permitindo o acompanhamento da formulação matemática e do preenchimento da matriz de equilíbrio, configurando-se como uma excelente ferramenta didática de consulta e validação estrutural para discentes e profissionais (Oliveira et al., 2019; Santos, 2024).

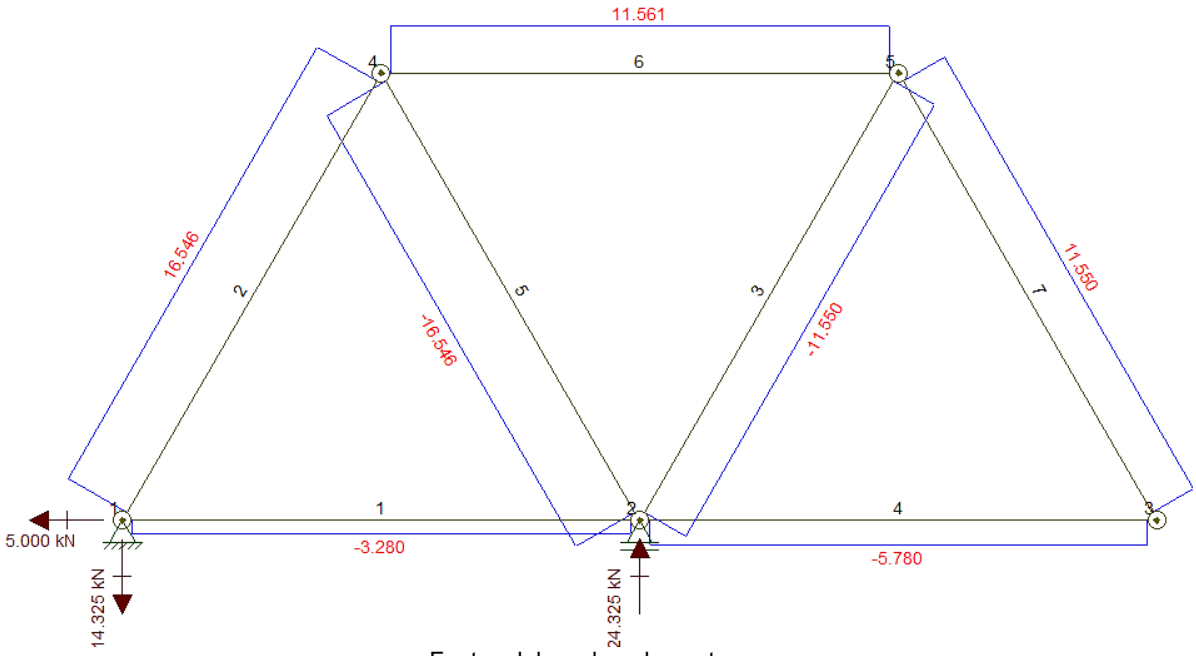
Assim, este trabalho tem como objetivo principal desenvolver uma implementação computacional no *Microsoft Excel* para o cálculo autônomo das reações de apoio e dos esforços axiais em treliças planas isostáticas biapoiadas. A pesquisa busca sistematizar as equações de equilíbrio estático em forma matricial e validar a precisão e acessibilidade da rotina mediante a modelagem de duas variações geométricas de treliças, comparando os resultados da planilha com as simulações do software acadêmico consolidado *Ftool*.

Ressalta-se que esta implementação computacional se restringe estritamente à determinação algébrica das reações de apoio e dos esforços axiais (tração e compressão) incidentes nas barras. O presente modelo não abrange o cálculo de deslocamentos nodais (flechas) e deformações elásticas. Adicionalmente, a rotina não realiza a verificação de instabilidade geométrica das barras comprimidas (flambagem), nem o dimensionamento das seções transversais segundo critérios normativos, configurando-se exclusivamente como uma ferramenta de análise de esforços de primeira ordem.

Metodologia

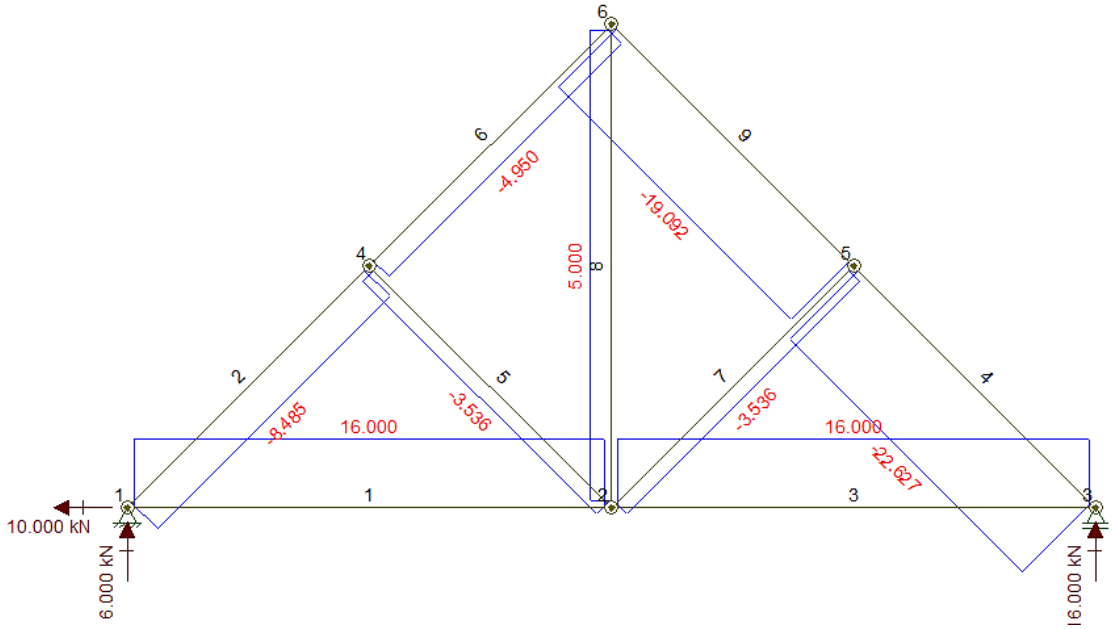
Para a realização deste estudo, optou-se por uma abordagem comparativa e quantitativa, estruturada a partir da modelagem de duas tipologias de treliças planas isostáticas: uma treliça com padrão Warren e uma tesoura de cobertura do tipo Fink, como podem ser observadas na Figura 1 e na Figura 2. Os resultados obtidos com a rotina computacional desenvolvida no Excel foram validados pela comparação direta com as respostas extraídas do software acadêmico de referência *Ftool*, utilizando-se o erro relativo percentual para atestar a precisão do modelo.

Figura 1 – Treliça 1 aplicada ao Ftool.



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 2 – Treliça 2 aplicada ao Ftool.

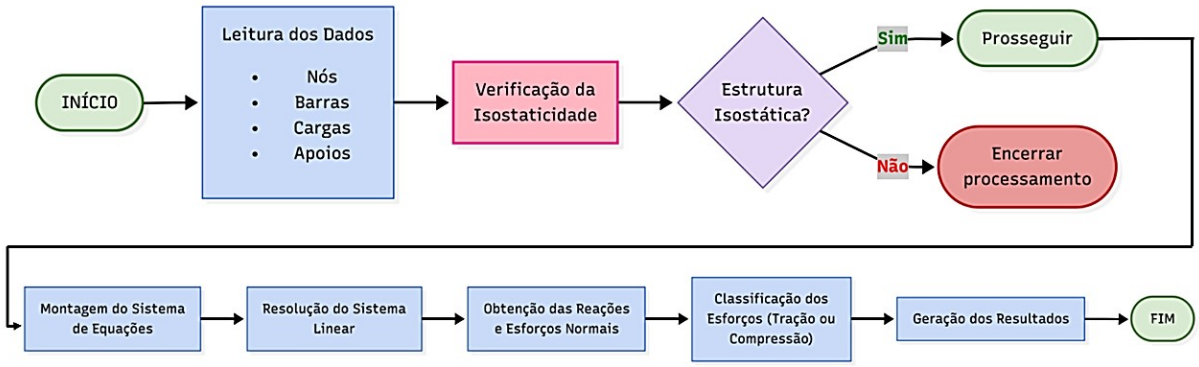


Fonte: elaborado pelos autores.

A formulação matemática do problema se baseia no Método dos Nós, fundamentado no princípio do equilíbrio estático bidimensional das partículas, em que o somatório vetorial das forças em cada nó deve ser nulo, ou seja, $\Sigma F_x = 0$ e $\Sigma F_y = 0$. Para transpor a geometria da treliça para os eixos cartesianos globais, o método utiliza versores (cossenos diretores), obtidos pela razão entre a variação das coordenadas dos nós e o comprimento total da barra, calculado pelo Teorema de Pitágoras. Essa sistematização permite que as equações de equilíbrio sejam organizadas em um sistema algébrico linear global do tipo $A \cdot X = B$, onde A é a matriz de coeficientes geométricos, X é o vetor de incógnitas (esforços e reações) e B é o vetor de forças externas aplicadas.

O foco principal da metodologia consistiu na implementação desse sistema matricial no ambiente do Microsoft Excel, através da rotina computacional proposta na Figura 3.

Figura 3 – Fluxograma da implementação



Fonte: elaborado pelos autores.

Para garantir a organização do fluxo de dados e o processamento autônomo, a pasta de trabalho foi estruturada logicamente em cinco planilhas interativas. A planilha Entrada constitui a interface inicial na qual o usuário insere os dados físicos e topológicos da estrutura, como as coordenadas dos nós, a conectividade das barras, as cargas externas aplicadas e as restrições de apoio. Nesta etapa, o algoritmo realiza automaticamente a verificação da condição de isostaticidade por meio da equação $m + r = 2\,j$, em que m representa o número de barras, r o número de reações de apoio e j o nnúmero de nós. O modelo foi parametrizado para processar estrutura com até 100 nós, garantindo a fluidez da ferramenta e evitando instabilidades numéricas no processamento do software.

A planilha Geometria é responsável por interpretar a topologia da treliça. O algoritmo cruza os dados de conectividade, calcula automaticamente o comprimento individual de cada barra e extrai seus respectivos cossenos diretores. Isso elimina a necessidade de o usuário inserir ângulos manualmente, mitigando erros trigonométricos.

A planilha Equações sistematiza as equações lineares do equilíbrio estático. A planilha gera duas linhas para cada nó ativo, alternando algoritmicamente a direção de análise para os eixos x e y. Simultaneamente, constrói o vetor de termos independentes (B), invertendo o sinal algébrico das cargas externas aplicadas para adequá-las ao modelo linear.

Já a planilha Matriz consolida a montagem da matriz de coeficientes (A). A matriz global foi logicamente particionada em três blocos: o primeiro armazena as componentes geométricas dos esforços axiais (cossenos e senos diretores); o segundo modela de forma binária (1 ou 0) os apoios estruturais; e o terceiro aplica o mecanismo de *padding*. O *padding* insere uma matriz identidade nas células inativas da planilha, evitando que as posições ociosas tornem a matriz global singular e viabilizando sua inversão para diferentes dimensões de treliças.

Nesta planilha é construída a matriz global de coeficientes (A) segmentada em três blocos operacionais e com rótulos dinâmicos gerados por [=COL() – 3]. No bloco de esforços axiais, o algoritmo multiplica os coeficientes da matriz de incidência (1 para nó de origem, –1 apara destino, 0 sem conexão) pelos respectivos versores geométricos. No bloco de apoios, a função lógica [=E] aloca o valor 1 apenas quando há correspondência simultânea entre o nó e o eixo de restrição. O terceiro bloco aplica o mecanismo de *padding* na zona inativa da planilha, inserindo o valor 1 quando o índice da linha

se iguala ao da coluna. Isso cria uma matriz identidade nos espaços ociosos, evitando que as posições inativas provoquem singularidade na matriz global e viabilizando sua inversão, conforme ilustrado na Figura 4:

Figura 4 – Matriz de coeficientes

BLOCO 1: BARRAS (Esforços Axiais)			BLOCO 2: APOIOS (Reações R1, R2 e R3)			BLOCO 3: PADDING (Preenchimento de Estabilidade)				
+cos	0	-cos	1	0	0	0	0	0	0	0
+sen	-sen	0	0	1	0	0	0	0	0	0
-cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-sen	+sen	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Zona Ativa (eq. da treliça) Zona Inativa (espaço extra na planilha)

Padding Reações + Forças aplicadas

Fonte: elaborado pelos autores.

Por fim, a planilha Resultados atua como o módulo de pós-processamento e interface final (*front-end*). A resolução do sistema ocorre integralmente pelo uso combinado das funções nativas [=MATRIZ.MULT] e [=MATRIZ.INVERSO], que multiplicam a matriz inversa de coeficientes pelo vetor de cargas ($A^{-1} \cdot B$). O vetor solução gerado é então interpretado por funções condicionais que classificam automaticamente os esforços com base em seus sinais algébricos: valores positivos indicam "Tração", negativos indicam "Compressão", e variáveis puramente computacionais são ocultadas para manter a clareza visual dos resultados estruturais.

Resultados e Discussões

A análise numérica consistiu na modelagem das duas topologias de treliças, confrontando-se os resultados gerados pela planilha com aqueles obtidos no software Ftool. A rotina desenvolvida no Excel fundamenta-se nas equações de equilíbrio do Método dos Nós, organizadas em forma matricial, enquanto o Ftool realiza a análise estrutural por meio de formulação matricial baseada no método da rigidez. Apesar das diferentes estratégias de implementação, a elevada concordância entre os resultados obtidos confirmou a consistência da sistematização desenvolvida.

A Treliça 1, mostrada na Figura 1, possui topologia assemelhada ao padrão Warren, apresenta um vão em balanço e foi submetida a um carregamento assimétrico, composto por uma força horizontal de 5,00 kN no nó superior e uma força vertical de 10,00 kN na extremidade direita. Este arranjo gera uma forte tendência de giro global na estrutura. Como demonstrado na Figura 5, a planilha reproduziu adequadamente esse comportamento mecânico: identificou que o apoio central atua como pivô, recebendo a maior carga de compressão (R3 = 24,33 kN), o que exige uma reação vertical descendente no apoio esquerdo (R2 = –14,33 kN), necessária para manter o equilíbrio estático da estrutura.

A barra N002 apresentou o maior esforço de tração, de 16,54 kN, enquanto a barra N005 apresentou o maior esforço de compressão, também de 16,54 kN. A divergência máxima em relação ao Ftool correspondeu a um erro relativo de 0,20%, decorrente do arredondamento da cota de altura (3,464 m) inserida na etapa de entrada de dados.

A Treliça 2, apresentada na Figura 2, corresponde a uma tesoura do tipo Fink, com simetria geométrica e submetida a um carregamento assimétrico devido à aplicação de uma força horizontal de 10,00 kN no ápice. Os resultados reproduziram o comportamento estrutural esperado: os banzos superiores inclinados apresentaram esforços predominantemente de compressão, atingindo 22,62 kN na barra N004, enquanto o banzo inferior atuou como tirante, com esforço de tração de 16,00 kN nas barras N001 e N003.

Figura 5 – Compara de resultados para a Treliça 1 e Treliça 2.

TRELIÇA 1				TRELIÇA 2			
Elemento	Planilha (kN)	Ftool (kN)	Erro (%)	Elemento	Planilha (kN)	Ftool (kN)	Erro (%)
N001	-3,274	-3,28	0,20%	N001	16	16	0,00%
N002	16,547	16,546	0,01%	N002	-8,485	-8,485	0,00%
N003	-11,547	-11,55	0,03%	N003	16	16	0,00%
N004	-5,774	-5,78	0,11%	N004	-22,627	-22,627	0,00%
N005	-16,547	-16,546	0,01%	N005	-3,536	-3,536	0,00%
N006	11,547	11,561	0,12%	N006	-4,95	-4,95	0,00%
N007	11,547	11,55	0,03%	N007	-3,536	-3,536	0,00%
R1	-5	-5	0,00%	N008	5	5	0,00%
R2	-14,33	-14,325	0,04%	N009	-19,092	-19,092	0,00%
R3	24,33	24,325	0,02%	R1	-10	-10	0,00%
				R2	6	6	0,00%
				R3	16	16	0,00%

Fonte: elaborado pelos autores.

Para a Treliça 2, os resultados obtidos pela planilha coincidiram com aqueles fornecidos pelo Ftool para todas as barras e reações analisadas, resultando em erro relativo de 0,00%, conforme apresentado na tabela da Figura 5. Essa concordância confirma a consistência da formulação matricial implementada e evidencia a redução de erros operacionais e de arredondamento intermediário em relação ao cálculo manual nó a nó.

Conclusão

A implementação computacional no Microsoft Excel atendeu aos objetivos propostos, demonstrando capacidade para a formulação, resolução e análise automática dos esforços axiais em treliças planas isostáticas biapoiadas. A elevada concordância com os resultados obtidos no software Ftool para as duas topologias analisadas validou a transposição das características geométricas das treliças para a matriz de equilíbrio nodal. Adicionalmente, o mecanismo lógico de padding mostrou-se necessário para evitar que as posições inativas da matriz global provocassem singularidade, viabilizando sua inversão para diferentes dimensões de treliças.

Um dos principais diferenciais da implementação desenvolvida reside em sua transparência metodológica, uma vez que a planilha permite o acompanhamento da montagem da matriz de coeficientes e da alocação dos versores geométricos em cada etapa do processamento. Dessa forma, além de possibilitar a verificação dos resultados, a rotina constitui um instrumento educacional para o ensino de Mecânica dos Sólidos, permitindo ao estudante acompanhar as etapas envolvidas na determinação das reações de apoio e dos esforços axiais nas barras.

Como sugestão de trabalhos futuros, recomenda-se a inserção de macros programadas (VBA) para criar mecanismos de verificação ativa de consistência nos dados de entrada, disparando alertas contra arranjos instáveis (mecanismos cinemáticos) antes do cálculo. Adicionalmente, a lógica transparente estruturada nesta pesquisa serve como uma base teórica testada e fundamentada (*benchmark*) para subsidiar a migração do código para linguagens de programação mais avançadas, como Python, o que permitiria escalonar o escopo do modelo para o Método dos Elementos Finitos (MEF), abrangendo deformações elásticas e flambagem em pórticos tridimensionais.

Referências

GODOI, Rodrigo M.; VANALLI, Leandro; SILVA, S. S. Análise de estruturas utilizando o software excel através do método da rigidez direta. In: ENCONTRO ANUAL DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 26., 2017, Maringá. **Anais** [...]. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2017.

HIBBELER, Russell C. **Análise estrutural.** 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

OLIVEIRA, Charles. J. et al. Aplicação do software Excel como ferramenta de ensino para resolução de treliças planas utilizando elementos finitos de barras. **Revista Tecnologia**, v. 40, n. 2, p. 1-13, dez. 2019.

SANTOS, Marcílio M. **Solução de treliças planas hiperestáticas via análise matricial de estruturas**: comparação com o método da carga unitária e o software FTOOL. 2024. 56 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2024.